1ERE S **SUITES** feuille 20

Exercice 3

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

1°) On pose, pour tout entier n, $w_n = v_n - u_n$.

a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
b) Exprimer w_n en fonction de n et déterminer sa limite.

2°) a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de w_n, en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b) Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

3°) On pose, pour tout entier n, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante que l'on précisera.

4°) A l'aide des résultats des questions **1** et **3**, et en résolvant un système d'équations, déterminer l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

5°) Déterminer la limite de ces deux suites.

I/ Suites arithmétiques

1°) Sachant que la suite u est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = -2$, calculer les termes u_1 et u_6.

2°) Sachant que la suite v est une suite arithmétique de raison r, de premier terme v_0 et telle que $v_4 = 32$ et $v_{10} = -10$, calculer la raison r et le premier terme v_0.

3°) Calculer la somme des nombres entiers positifs impairs inférieurs à 100 :

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99.$$

II/ Suites géométriques

1°) Sachant que la suite u est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{4}$, calculer les termes u_1 et u_6.

2°) Sachant que la suite v est une suite géométrique de raison q, de premier terme v_0 et telle que $v_3 = 3$ et $v_5 = \dfrac{4}{3}$, calculer la raison q et le premier terme v_0.

3°) Exprimer plus simplement la somme :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

En déduire sa limite quand n tend vers $+\infty$.