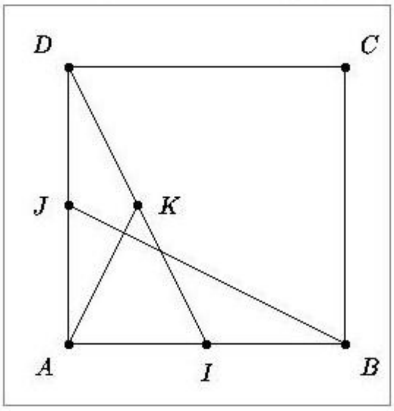
Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AD]$ et K le milieu de $[ID]$.
Montrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.



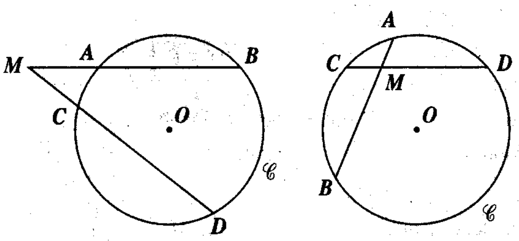
Exercice 2 ***Puissance d'un point par rapport à un cercle***

A. Le résultat de base

Soit un cercle de centre O, de rayon R et M un point n'appartenant pas à ce cercle.

1. Une droite Δ passant par M rencontre (C) en A et B. On désigne par E le point diamétralement opposé à A sur (C). Faire deux figures illustrant les données, l'une avec M extérieur à (C) et l'autre avec M intérieur à (C).

   Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = MO^2 - R^2$



2. Déduire que dans chacune des configurations ci-contre, on a :

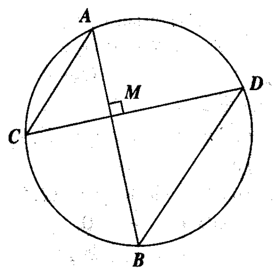
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$

B. **Application n°1** : "Médiane de l'un, hauteur de l'autre"

On donne un cercle (C) et les points A, B, C et D de (C) tels que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales et sécantes en M.

Montrer que la médiane issue de M dans le triangle MAC est orthogonale à (BD).

(c'est donc la hauteur issue de M dans le triangle MBD)



C. **Application n°2** : "Symétrique de l'orthocentre"

Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La hauteur issue de A rencontre (BC) en P et Γ en A_1 ; on désigne par H le symétrique de A_1 par rapport à P.

1. Montrer que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AP}$
2. En déduire à l'aide du A) que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
3. Démontrer de même que $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ (Que représente le point H pour ABC ?)
4. Retrouver ainsi que "le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit"