Exercice 1 : Une étude de fonction (d'après BAC ES).

Partie A

La courbe (C_g) est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur **[0 ;+ ∞[** dans un repère orthogonal
(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). La courbe (C_g) vérifie les quatre conditions suivantes :

- (C_g) passe par le point A(0 ;-100).
- (C_g) présente en A(0 ;-100) une tangente d'équation y = -1 200x – 100.
- L'abscisse du point de (C_g) présentant une tangente horizontale est la solution POSITIVE de l'équation $x^2 - 400 = 0$.
- L'image de 20 par g est (- 16 100).

1. On suppose que g est définie par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (avec a,b,c,d des réels), Montrer que $\mathbf{g(x) = x^3 - 1\,200x - 100}$.
2. a) Déterminer la limite de g en + ∞.
   b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α sur l'intervalle [20 ; 40]. Donner, en le justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.
4. En déduire le signe de g(x) selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x + 50 + \dfrac{1\,200x + 50}{x^2}$.

On appelle (C_f) est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). (On prendra 1 cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 20 en ordonnée).

1. Déterminer les limites de f :
   a. en 0
   b. en + ∞.
2. a) Montrer que, pour tout x de]0 ; +∞[, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, où g est la fonction définie dans la partie A.
   b) Etudier les variations de f.
3. a) Montrer que (C_f) présente une droite D comme asymptote oblique en + ∞. (Déterminer l'équation de D).
   b) Etudier la position relative de (C_f) et de D.
4. Donner l'équation de T, la tangente à (C_f) au point B d'abscisse 20.
5. Construire (C_f), la tangente T et D sur le même graphique.