Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

   $$u_n \leqslant n + 3.$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n,

   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).