

Exercice 4 (5 points)

Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$ de deux façons différentes.

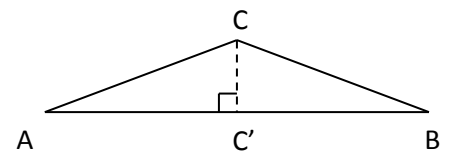
1°) Première méthode.

- a) Rappeler les formules liant $\cos 2a$ à $\cos a$ d'une part, et à $\sin a$ d'autre part.
 b) En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$.

2°) Deuxième méthode.

On considère un triangle ABC, isocèle en C, tel que :

$$AC = BC = 1 \text{ et } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{8}.$$



- a) Démontrer le théorème d'Al-Kashi : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB}$
 b) En déduire la longueur AB.
 c) On note C' le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.
 d) En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{8}$.

II/ Formules d'addition. (4 points)

En remarquant que $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ et que $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$,

calculer les valeurs exactes des cosinus et sinus de $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.

III/ Formules de duplication. (6 points)

En remarquant que $2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$,

calculer les valeurs exactes des cosinus et sinus de $\frac{3\pi}{8}$.

En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}$.