Exercice 5 (6,5 points)

1°) Exprimer $\cos^2 x$ et $\cos 4x$ en fonction de $\cos 2x$.

2°) Soit (E) l'équation : $2 \cos^2 x + \cos 4x - 1 = 0$.

a) Montrer que (E) équivaut à l'équation :

$$(E') : 2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Résoudre alors cette équation dans $\mathbf{R}$ puis dans $]-\pi ; \pi]$

(On pourra poser $X = \cos 2x$)

b) Montrer que (E) équivaut à l'équation :

$$(E'') : \cos 2x = \cos(\pi - 4x)$$

Résoudre alors cette équation dans $\mathbf{R}$ puis dans $]-\pi ; \pi]$.

Vérifier qu'on retrouve bien les résultats du 2°a).

3°) Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points M_i tels que $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_i}) = x_i$, x_i étant solution de (E) sur $]-\pi ; \pi]$.

Exercice 4 (3 points)

$$\text{Soit } a \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[.$$

1°) a) Démontrer que : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$.

b) En déduire que : $\frac{1 + \sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$.

2°) Sans calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ ni $\sin \frac{\pi}{12}$, déduire de la question précédente que :

$$\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$