

Un objet fractal est une forme extrêmement irrégulière, éventuellement interrompue, fragmentée quelle que soit l'échelle du dessin. Le mathématicien von Koch a proposé une construction simple d'un tel objet :



Flocon d'ordre 0

La construction de ce « flocon » repose sur un principe simple. Le point de départ est un triangle équilatéral de côté 1. Pour chaque côté on effectue la construction suivante :

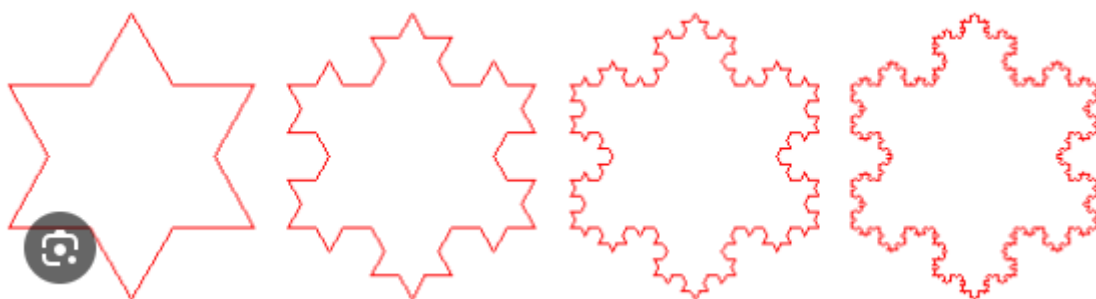
- 1° Diviser le segment en trois parties égales
- 2° Construire un triangle équilatéral « sur le segment du milieu »



Flocon d'ordre 1

En comparant le flocon « 0 » avec le flocon « 1 » :

- Le nombre de côtés a-t-il augmenté (? !!)
- Le périmètre a-t-il augmenté ? De combien ?
- L'aire a-t-elle augmenté ?



On répète alors la construction précédente pour obtenir le flocon d'ordre 2, puis le flocon d'ordre 3 etc.

Nous allons étudier quelques propriétés remarquables de cette figure.

Notations :

- l_n désigne la longueur d'un côté du flocon d'ordre n .
- c_n désigne le nombre de côtés du flocon d'ordre n .
- P_n désigne le périmètre du flocon d'ordre n .
- A_n désigne l'aire du flocon d'ordre n .

Partie A :

1° Calculer les valeurs initiales : l_0 , c_0 , P_0 , A_0

2° Déterminer les « formules » qui permettent de passer de l_n à l_{n+1} et de c_n à c_{n+1} .

3° Quelle est la valeur de P_n en fonction de c_n et de l_n ?

Partie B :

A l'aide du tableur construire un tableau de calcul donnant la suite des valeurs des suites précédentes. Quelles conjectures peut-on faire en observant les valeurs calculées ?

Partie C : Pour aller plus loin

Montrer que :

$$1. \quad l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$2. \quad c_n = 3(4)^n$$

$$3. \quad P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$4. \quad A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{puis que : } A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$5. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$