Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

On a tracé en annexe la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

1) a) Sur le graphique en annexe, construire les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variations et sur la convergence de la suite (u_n) ?

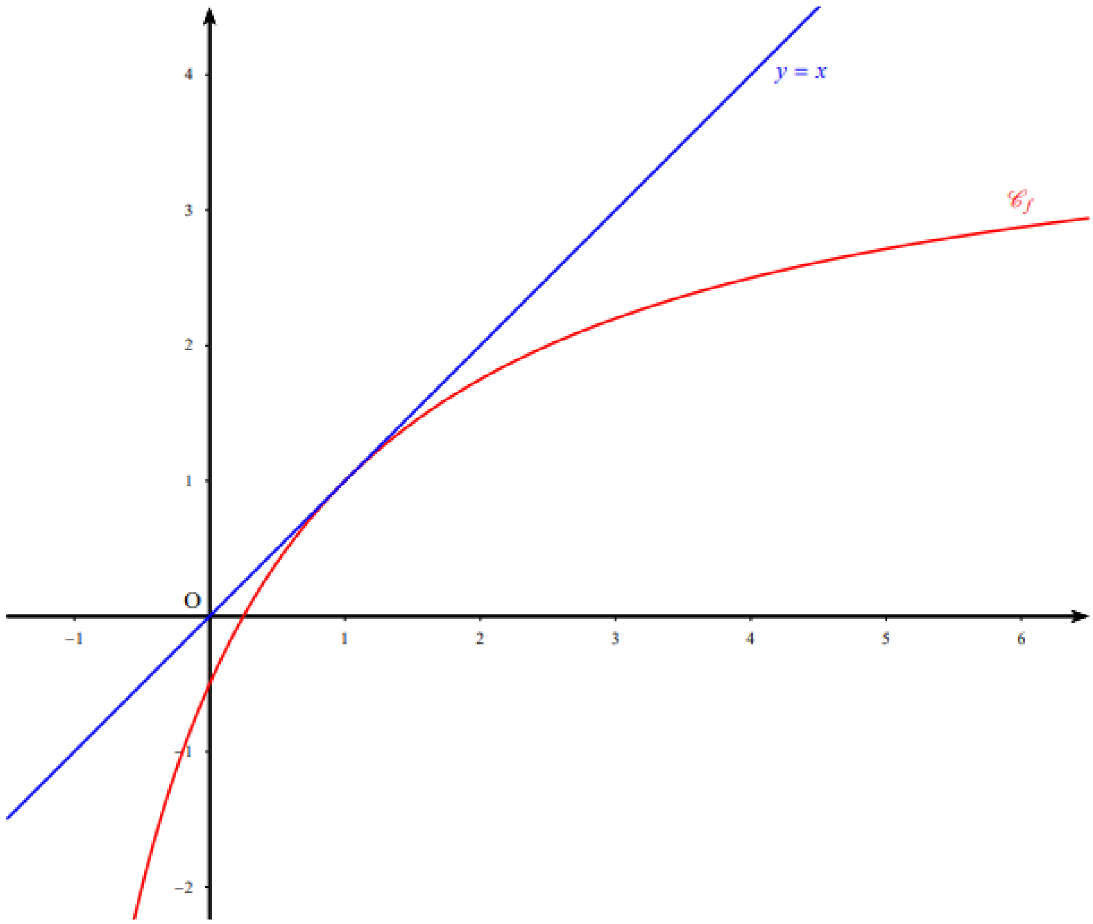
2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme. En déduire les variations de (v_n) puis de (u_n).

   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c) Montrer que l'on peut écrire $u_n = \dfrac{4 + \dfrac{15}{n}}{4 + \dfrac{3}{n}}$.

   En déduire la limite de la suite (u_n) en vous justifiant.



$y = x$
$\mathscr{C}_f$
O
4
3
2
1
−1
−2
−1
1
2
3
4
5
6