Exercice 5 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

   c) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

Exercice n°2: /5 points:

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4=5$ et $u_1=11$.

1. Calculer la raison et le premier terme de la suite.
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{2004} .
4. Soit $S_n=u_0+u_1+u_2=..+u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.
5. En déduire S_{2004} .

Exercice n°3:/ 6 points

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}$ et $u_0=\dfrac{-3}{2}$.

1. Calculer la valeur de u_1 , u_2 et u_3 .
2. Cette suite est-elle géométrique? Arithmétique? Justifier votre réponse.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-2}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
4. Exprimer v_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.