Exercice 1 (2 points)

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1999 + 2000 \quad \text{et} \quad S_2 = 2001 + 2002 + 2003 + \ldots + 9998 + 9999.$$

Exercice 2 (3 points)

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 3 (4 points)

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 Euros.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

   Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$)

Exercice 4 (4 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Démontrer que : $$u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$$
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$