

91 Utilisation d'une suite auxiliaire

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n}.$$

1 Calculer les termes u_1 et u_2 .

2 La suite u est-elle arithmétique ? géométrique ?

3 Tracer dans un repère orthonormé (unité : 5 cm) :

- la droite $\Delta : y = x$;
- la courbe représentative de $f : x \mapsto \frac{2x}{2 + 3x}$;
- les premiers termes de u .

Quelles conjectures peut-on émettre sur les variations de la suite u ?

4 On admet que, pour tout entier n , u_n n'est pas nul.

On définit la suite v sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2}{u_n}$.

a. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire que la suite v est arithmétique (préciser la raison).

c. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

5 Étudier les variations de la suite u et comparer avec la conjecture de la question **3**.

92 Utilisation d'une suite auxiliaire

On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel

$$n, u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}.$$

1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2 On représente ci-contre la courbe d'équation $y = f(x)$

où f est la fonction

numérique, telle que pour tout entier n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Déterminer la fonction f .

b. Visualiser la suite u sur le graphique ci-dessus, et conjecturer :

- le sens de variation de la suite u ;
- la limite éventuelle de la suite u .

3 Pour tout entier n , on pose :

$$v_n = \frac{4 - u_n}{u_n - 1}.$$

a. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

b. Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n .

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

4 Pour aller plus loin

Prouver la conjecture émise à la question **2** b. sur les variations de u .

