

**EXERCICE 2** ( 5 points )

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note  $P_0$  la population initiale et  $P_n$  la population au bout de  $n$  années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de  $P_n$  par la relation :

$$(R) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que  $P_0 = 40\,000$  et  $P_1 = 60\,000$ .

On définit l'accroissement de la population pendant la  $n$ -ième année par la différence  $P_n - P_{n-1}$ .

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire  $P_2$  et  $P_3$ .
2. On considère les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \text{ et } V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n$$

- a. Prouver que la suite  $(U_n)$  est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- b. En utilisant la relation (R), calculer  $V_{n+1} - V_n$ .  
En déduire que, pour tout  $n$ , on a :  $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$ . Calculer  $V_n$ .
- c. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $P_n = 2(V_n - U_n)$ . En déduire une expression de  $P_n$  en fonction de  $n$ .
- d. Montrer que la suite  $(P_n)$  converge et calculer sa limite.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand?