

**EXERCICE 2** (5 points)

Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5% du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

**PARTIE A : ETUDE THEORIQUE :**

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année 2005 +  $n$ .

Ainsi,  $u_0 = 100\,000$ .

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 1,05u_n + 4\,000$ .
- 3) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n + 80\,000$ .
  - a) Calculer  $v_0$ .
  - b) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - c) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que  $u_n = 180\,000 \times (1,05)^n - 80\,000$ .
  - d) Calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**PARTIE B :**

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la PARTIE A.

- 1) Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
- 2) A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?