1-1 : L'algorithme de la racine carrée

Un algorithme de calcul de $\sqrt{a}$ (algorithme de Héron, déjà connu des Babyloniens) consiste à utiliser la suite récurrente $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$ de premier terme u_0 quelconque et positif.

1. Vérifier graphiquement que u_n converge.

2. Montrer que si u_0 est positif, u_1 est forcément supérieur à $\sqrt{a}$ puis montrer que tous les u_n sont supérieurs à $\sqrt{a}$.

3. Montrer que la suite u_n est décroissante ; conclure quand à la convergence de u_n.

4. Faire l'application numérique pour a=2.

5. On prend $a>1$.

a. Montrer que pour tout n , $u_{n+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2\le\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{a})^2$.

b. Montrer par récurrence que $u_n-\sqrt{a}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\left(u_0-\sqrt{a}\right)$.

c. En supposant que $\left|u_0-\sqrt{a}\right|\le 2$, au bout de combien d'itérations sera-t-on sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-9} près ?

1-2 : Récurrence sur deux termes

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=0,\ u_1=1 \\ u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}\end{cases}$.

1. Montrer que la suite s_n définie par $s_n=u_{n+1}+u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n=(-1)^n u_n$ et on considère la suite t_n définie par $t_n=v_{n+1}-v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme $t_0+t_1+...+t_n$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{8^n}$.