1-1 : Limites – 1

Déterminer la limite des suites définies par leur terme général

$a_n = 2^n + 2^{n+2} - 2^{n+3}$ $b_n = \sin\left(\sqrt{n}\right) - n^3$ $c_n = 3^n - 7^n$.

1-2 : Limite d'une somme

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [\![1 ; n]\!]$, on a $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n+1}$.

2. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$.

3. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et préciser sa limite.

1-3 : Encore une suite

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante?

2. On pose $v_n = u_n - 4n + 10$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en préciser la raison.

4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

6. Quelle est la limite de (u_n)?

7. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.