<u>Exercice 1</u> *(4,5 points)*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3.$$

a) Tracer dans un même repère orthonormal d'unité 2 cm la représentation graphique D de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
c) En faisant apparaître le mode de construction, utiliser ce graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
d) Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

2°) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Précisez son premier terme v_0.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) Exprimer v_n en fonction de u_n, et en déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$.
d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
e) Déterminer la limite de la suite (u_n).