Exercice 2

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80%, ainsi que l'apparition de 4 000 nouveaux abonnés.

L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.

Les question 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On note a_n le nombre des abonnés à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année et on précise que $a_0 = 7\,000$.

1°) Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4\,000$.

2°) L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).

On considère un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm représente 1 000 abonnés).

a) Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y = 0{,}8x + 4\,000$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$, pour les abscisses comprises entre 0 et 25 000.

b) Placer a_0 sur l'axe des abscisses. Utiliser les droites précédentes pour placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2 et a_3 en justifiant.

c) Si l'on poursuit le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ?

3°) L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).

Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 20\,000 - a_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_n = 20\,000 - 13\,000 \times 0{,}8^n$.

c) En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).

d) Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 16 000 ?