

I/ Fonctions et suites. (9 points)

Soit la suite u définie sur $\mathbf{N}^*$ par : $u_n = n - 1 + \frac{4}{n}$

A] Etude directe.

- 1°) Calculer les 4 premiers termes de la suite u .
- 2°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n et en déduire à partir de quel rang la suite u est monotone.
- 3°) La suite u est-elle convergente ou divergente ? (Justifier)

B] Etude indirecte.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x}$ et C_f sa courbe représentative.

- 1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2°) En déduire que C_f admet une asymptote verticale et démontrer que C_f admet également une asymptote oblique dont on donnera une équation.
- 3°) Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f . Dresser le tableau de variations complet de f .
- 4°) Vérifier les résultats obtenus dans la partie A.
- 5°) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)

II/ Suites récurrentes. (6 points)

Soit u la suite définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 3 + \frac{1}{2} u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- 1°) Tracer dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm) les droites D et Δ d'équations respectives : $y = \frac{1}{2}x + 3$ et $y = x$. En déduire une construction des 4 premiers termes de la suite u (Expliquer cette construction)

- 2°) Soit v la suite définie par : $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- a) Exprimer pour tout entier n , v_{n+1} en fonction de v_n .
- b) En déduire que v est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- c) Déterminer une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n .
- d) Justifier que la suite v est convergente et en déduire la convergence de la suite u .