

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.

De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.

On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'est pas inscrite.

La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits. On a donc $g_0 = 0,2$.

1. Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?
2.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1$.
3. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = g_n - 0,125$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Montrer que pour tout entier n , $g_n = 0,125 + 0,075 \times 0,2^n$.
Comment la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années ?