Exercice 1 **Les questions suivantes sont indépendantes** **8 points**

1) Calculer la somme $S = 1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \dots\dots + \pi^{100}$
2) Calculer la somme $T = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \dots + \frac{100}{\pi}$; en déduire la somme U :
$$U = \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \dots + \left(1 + \frac{100}{\pi}\right)$$
3) Calculer la somme S_n et en déduire sa limite :
$$S_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$
4) Simplifier le produit : $q \times q^3 \times q^5 \times \dots \times q^{97}$

Exercice 2 **7,5 points**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) On définit, pour tout n de IN, la suite (v_n) par :
$v_n = u_n - \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}$
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques.
b) En déduire v_n *puis* u_n en fonction de n :
c) Déterminer en fonction de n :
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

Exercice 3 **8 points**

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B. Chaque mois 20 % des fourmis de la population A passe en B et 30 % des fourmis de la population B passe en A.
On notera u_n et v_n le nombre total de milliers de fourmis le mois n respectivement dans les fourmilières A et B.
Le nombre initial de fourmi est $u_0 = 320$ milliers et $v_0 = 180$ milliers.

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{7}{10}v_n \end{cases}$$
2) On pose $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = -2u_n + 3v_n$
a) Montrer que la suite (s_n) est une suite constante et donner la valeur de cette constante.
b) Montrer que la suite (t_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques.
3) En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.
4) Déterminer :
$\lim_{n \to +\infty} u_n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} v_n$

Exercice 4 **8,5 points**

Le but de cet exercice est de calculer la mensualité <u>fixe</u> M (c'est-à-dire la somme fixe à rembourser tous les mois) d'un prêt que Jeanne a fait le 1er janvier 2011. Son montant est de 10 000 € et le taux mensuel est de 0,5%.
La banque procède comme suit pour le calcul des intérêts :
Le 1er février 2011 Jeanne calcule $10\,000 \times \frac{0.5}{100} = 50$ € d'intérêts, elle doit donc à la banque 10 050 €. Jeanne rembourse sa mensualité M, la somme due est donc : 10 050 − M

1) Montrer que le 1er mars 2011, Jeanne doit, après versement de sa mensualité, 10 100,25 −2,005M.
2) Soit u_n la somme due, n mois après le 1er janvier 2011. Montrer que $u_{n+1} = 1{,}005u_n - M$.
3) Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = u_n - \frac{M}{0{,}005}$
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques.
4) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n
5) Si la durée du prêt est de 60 mois, alors la somme due après ces 60 mois est 0. Ainsi $u_{60} = 0$, en déduire la valeur de M.