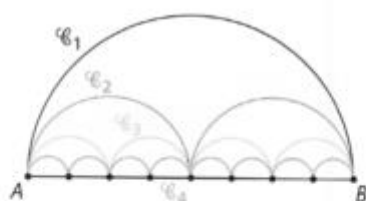


80 Demi-cercles emboîtés

Le segment $[AB]$ a pour longueur 8 cm.

C_1 est un demi-cercle de diamètre $[AB]$; C_2 a pour extrémités A et B, et est composé de deux demi-cercles de même rayon; C_3 a pour extrémités A et B, et est composé de quatre demi-cercles de même rayon; et ainsi de suite: pour tout entier $n \geq 1$, C_n a pour extrémités A et B, et est composé de 2^{n-1} demi-cercles de même rayon.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note ℓ_n la longueur de C_n .

Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

84 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par: $u_n = \frac{n^3}{3^n}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la monotonie de cette suite en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

1 Dresser le tableau de valeurs des sept premiers termes de la suite u .

Conjecturer la monotonie de cette suite.

2 Vérifier que pour tout entier $n \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{3n^3}$.

3 a. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ est celui de $-2n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

b. Soit la fonction $f: x \mapsto -2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Dresser le tableau de variations de f .

Quel est le signe de f sur $[3; +\infty[$?

c. En déduire le sens de variation de la suite u .