

137 Somme des carrés d'entiers consécutifs

1. Déterminer le polynôme P de degré 3 tel que pour tout réel x , $P(x+1) - P(x) = x^2$ et $P(1) = 0$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n+1).$$

3. En déduire que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Applications : calculer la somme des carrés des

a) 10 premiers entiers supérieurs ou égaux à 1 ;

b) 100 premiers entiers supérieurs ou égaux à 1.

139 Équation symétrique du quatrième degré

(E) désigne l'équation $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

a) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

b) Démontrer que si x_0 est solution de (E) alors $\frac{1}{x_0}$ est solution de (E).

c) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

d) Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

e) En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que l'équation

$$x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

se ramène à une équation du second degré.

f) Résoudre l'équation du second degré, puis en déduire les solutions de l'équation (E).