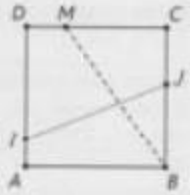
131 Dans un carré direct $ABCD$, de côté égal à l'unité de longueur, on considère les points I et J définis par :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$.



Un point M décrit le segment $[DC]$. On pose $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$.

1 Déterminer x pour que les droites (IJ) et (BM) soient perpendiculaires.

Aide On pourra utiliser le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ après avoir justifié qu'il est orthonormé.

2 Dans la suite, on désigne par K le point de $[DC]$ tel que : $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.

a. Le triangle IJK est-il rectangle ?

b. Déterminer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{IJK}$.

3 Soit H le point d'intersection des droites (BK) et (IJ) et L le point d'intersection de la droite (IJ) avec la parallèle à (BK) passant par D.

a. Établir que $IJ = KB = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

b. Justifier précisément que $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DK} = IJ \times LH$.

En calculant $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DK}$ d'une autre façon (linéarité ou repère) déterminer la valeur de LH.

c. En calculant $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KB}$ de deux façons, déterminer KH.

d. On admet que $DL = \frac{4}{\sqrt{29}}$.

Déterminer l'aire du trapèze $DLHK$.

127 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points $A(-1 ; 2)$, $B(1 ; 3)$ et $C(3 ; -1)$.

1 Démontrer que le triangle ABC est rectangle après avoir réalisé une figure.

2 Déterminer une équation de son cercle circonscrit Γ. Préciser les coordonnées de son centre K et son rayon.

3 Déterminer une équation de la tangente à Γ en A.

4 Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Sans chercher à calculer les coordonnées du point H dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, établir les relations :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 = AH \times AC.$$

En déduire que $AH = 1$ et $HK = 1,5$.

5 Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$.

Aide On pourra en chercher une équation cartésienne, ou réfléchir géométriquement.

Représenter (E) sur la figure réalisée au **1**.