### *1-1 : Lignes de niveau 1 (c)*

Construire un triangle isocèle *ABC* tel que *AB* = *AC* = 13 et *BC* = 10. On note *G* son centre de gravité.

1. Calculer les longueurs *AG*, *BG* et *GC*.

2. Montrer que pour tout point *M* du plan on a $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

3. Déterminer et construire l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 194$.

4. Déterminer et construire l'ensemble des points *M* du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.

### *1-2 : Lignes de niveau 3 (c)*

Soient les points *A*(−1 ; 1) et *B*(0 ; 2).

1. Déterminer l'ensemble E des points *M*(*x* ; *y*) tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$. Tracez cet ensemble.

2. Déterminer l'ensemble F des points *M* du plan tels que $MA^2 - MB^2 = AB^2$. Tracez cet ensemble.

3. Déterminer l'intersection de E et F.

### *1-3 : Fonction scalaire de Leibniz*

Soit *ABC* un triangle, on pose : *a* = *BC*, *b* = *AC* et *c* = *AB*. On note *A'*, *B'*, *C'* les milieux respectifs des côtés $[BC],[AC],[AB]$ et *G* le centre de gravité du triangle *ABC*.

1. a. Montrer que $GB^2 + GC^2 = \frac{1}{2}GA^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

b. Après avoir écrit deux autres relations analogues, montrer que: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

2. A tout point M du plan, on associe le réel : $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

a. Montrer que pour tout point *M* du plan, $f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

b. Pour tout réel *k*, soit $L_k$ l'ensemble des points *M* du plan tels que $f(M) = k$. ($L_k$ *est la* *ligne de niveau k* *de l'application f* : $M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$).

Déterminer suivant les valeurs du réel *k*, la nature de l'ensemble $L_k$.