

Exercice 3 (5,5 points)

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que : $AB = 4$.

On appelle I le milieu de [BC] et G le point défini par : $\vec{IG} = \frac{1}{4}\vec{IA}$.

Soit f la fonction qui à tout point M du plan associe le réel :

$$f(M) = 2\vec{MB}\vec{MC} + \vec{MC}\vec{MA} + \vec{MA}\vec{MB}.$$

1°) Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $f(I)$.

2°) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que pour tout point M du plan :

$$f(M) = f(G) + 4MG^2. \text{ (on ne demande pas de calculer } f(G) \text{ dans cette question)}$$

3°) a) Calculer AG^2 .

b) En utilisant le 1°) et le 2°), en que déduire $f(G) = -18$.

4°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = -16$ et le représenter sur une figure.