1 ERE S   **PRODUIT SCALAIRE**   feuille 18

Exercice 1

ABC est un triangle, on note α, β, γ les mesures en radians des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ et on pose *a* = BC, *b* = CA, *c* = AB.

1°) a) Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=AB^2$

b) En déduire que : $c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha$.

2°) Dans cette question, on suppose que $\beta = 2\alpha$.

a) Démontrer que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

b) En utilisant la formule des sinus : $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$, démontrer que $\cos\alpha=\dfrac{b}{2a}$.

c) En déduire que : $b^2 - a^2 = ac$.

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3. Soit I le milieu de [AB] et J celui de [IC].

Soit (*E*) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$.

On se propose de déterminer la nature de l'ensemble (*E*) de deux façons.

1ère méthode

1°) Montrer que $B \in (E)$.

2°) En utilisant deux fois le théorème de la médiane, démonter que :

$M \in (E)$ si et seulement si : $4MJ^2 + \dfrac{1}{2}AB^2 + IC^2 = 66$.

3°) En déduire la nature et les éléments caractéristique de (*E*) et le représenter.

2ème méthode

On utilise le repère orthonormal $\left(A;\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB},\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$.

1°) Déterminer une équation de (*E*) dans ce repère.

2°) Retrouver le résultat de la première méthode.