1. 1. Boules+VA, C Antilles 1994

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On arrête le tirage après l'obtention d'une boule blanche.

1. On limite le nombre de tirages à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention de la première boule blanche. Si on n'a pas tiré de boule blanche après le $4^{\text{ème}}$ tirage on prend X = 0.

a. Calculer la probabilité *p*(X = 0).

b. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

2. On procède maintenant à *n* tirages au maximum, *n* > 1. X est la v.a. définie comme précédemment, si on n'a pas tiré de boule blanche après les *n* tirages on prend X = 0.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

Montrez que $\mathrm{E(X)} = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$ où *f* est la fonction définie par : $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

b. On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Montrez par récurrence que $g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Calculez *g'*(*x*) en utilisant les deux formes, déduisez-en une autre expression de *f*(*x*). Calculez alors E(X).

c. Déterminez la limite de E(X) quand *n* tend vers $+\infty$. Interprétez