

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

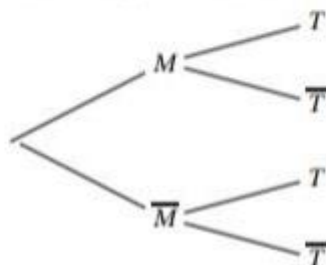
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).

On note p ($0 \leq p \leq 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



- b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P(\overline{M} \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de p .
2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p + 1}.$$

- b. Étudier les variations de la fonction f .
3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
- En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?