

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7.

On note, pour n entier naturel non nul :

G_n l'événement : « Juliette gagne la n^{e} partie » ;

P_n l'événement : « Juliette perd la n^{e} partie ».

Partie A

1. Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p(G_2/G_1)$ et $p(G_2/P_1)$. (3 × 0,25 point)

En déduire la probabilité $p(G_2)$. (0,25 point)

2. Calculer $p(P_2)$. (0,25 point)

Partie B

On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.

1. Déterminer, pour n entier naturel non nul, les probabilités $p(P_{n+1}/G_n)$ et $p(G_{n+1}/P_n)$.

(0,25 + 0,25 point)

2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases} \quad (0,75 \text{ point})$$

3. Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1. (0,5 point)

b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n .

(0,5 + 0,5 point)

4. a) Déduire du 3., l'expression de x_n en fonction de n . (0,5 point)

b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite. (0,25 + 0,25 point)