

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

- Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
- Quelle est son espérance ?
- Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que $p(A) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

- Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'évènement B_n .
- Calculer la limite de la suite (p_n) . Commenter ce résultat