108 Théorème de Ceva

ABC est un triangle.

On définit trois points A', B' et C' respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB) en posant :

$$\overrightarrow{A'C} = r\,\overrightarrow{A'B},\quad \overrightarrow{C'B} = p\,\overrightarrow{C'A} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B'A} = q\,\overrightarrow{B'C},$$

où p, q, et r sont trois réels différents de 1.

1 Justifier que chacune des égalités ci-dessus définit bien un point unique (A', B' où C').

2 On se place dans le repère (A, B, C).

a. Déterminer les coordonnées de A, B et C ainsi que celles de A', B' et C'.

b. Démontrer qu'une équation de la droite (BB') est :

$$qx - (1 - q)y = q.$$

c. Démontrer qu'une équation de la droite (CC') est :

$$(1 - p)x + y = 1.$$

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de (BB') et (CC'), s'il existe.

e. Donner une équation de la droite (AA').

3 Montrer que H appartient à la droite (AA') si, et seulement si, $pqr = -1$.

4 Justifier le théorème de Ceva : les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si, et seulement si, $pqr = -1$.

Info Ce théorème a été énoncé par Giovanni CEVA, mathématicien italien (1647-1734). Cependant, il était déjà connu, à la fin du XI^e^ siècle, de Yusuf Al-Mu'taman ibn Hûd, géomètre et roi de Saragosse.