Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de *f* .

b. Etudier la dérivabilité de *f* en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que *f* est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f\,'(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x < 1$.

d. Dresser le tableau de variation de *f*.

e. Représenter graphiquement la fonction *f*.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\dfrac{1}{3} < x_1 < 0$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que $0 < x_2 < \dfrac{2}{3} < x_3 < 1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1 .

3. a. On pose $u = \dfrac{3}{2}(x - \dfrac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3 - 6u - 1 = 0 .$$

b. Pour *i* = 1, 2, 3, on pose $u_i = \dfrac{3}{2}(x_i - \dfrac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i = \cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ pour tout θ réel.

(On rappelle que cos(*a*+*b*) = cos*a*.cos*b* – sin*a*.sin*b* et sin 2*a* = 2sin*a*.cos*a*)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans [0 ; π] et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.