

Exercice III (10 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{3x^3 - 8x + 6}{3(x-1)^2}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1°) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx}{3(x-1)^2}$

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) a) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (C) .

b) Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite Δ .

c) Indiquer une deuxième droite asymptote à (C) .

4°) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et démontrer que :

$$f'(x) = \frac{(x-2)(3x^2 - 3x + 2)}{3(x-1)^3}$$

5°) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition et tracer son tableau de variations.

6°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

7°) Tracer la courbe (C) en s'appuyant sur les différentes tangentes et asymptotes trouvées.