Exercice 4. *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-1 ; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+9}{x^2-1}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) Montrer que, pour tout $x \in D_f$: $f(x) = x + \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{4}{x+1}$

2°) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que C_f admet deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées. Les préciser.

c) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.

d) Préciser la position relative de C_f et Δ.

3°) a) Justifier que f est dérivable et montrer que l'on a :

$$f'(x) = \frac{x\,P(x)}{(x^2-1)^2}$$ où P est un polynôme de degré 3.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x : $x^3 - 3x - 18 = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.

c) En déduire le signe de f' sur $x \in D_f$.

4°) Déterminer les variations de f et dresser son tableau complet.

5°) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.

Vérifier que le point A(5 ; -5) appartient à T.

6°) Tracer les différentes droites citées et la courbe C_f sur la feuille jointe.