Exercice 5 *(8 points)*

A. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique d'une variable réelle *f*, définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 96x}{x - 4}$.

1°) Déterminer *a* et *b* tels que, pour tout *x* de l'ensemble de définition de *f* on ait :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-4}.$$

2°) Etudier les variations de *f*.

3°) On désigne par *C* la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) et par (D) la droite d'équation $y = x + 100$.

Etudier le signe de $f(x) - (x + 100)$.

Qu'en résulte-t-il pour la position relative de *C* et (D) ?

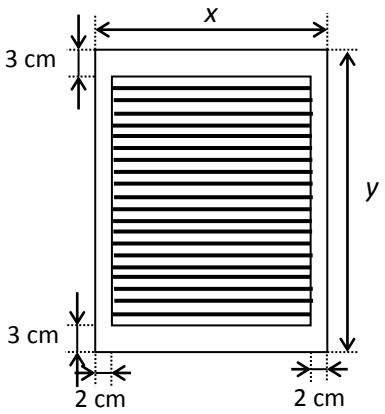
Quelle est la limite de $f(x) - (x + 100)$ quand *x* tend vers $+\infty$, quand *x* tend vers $-\infty$? Que peut-on en déduire pour (D) ?

4°) Montrer que le point I de coordonnées (4 ; 104) est centre de symétrie pour *C*.

5°) Tracer (D) puis *C*, 1 cm représentant 10 unités.

On veillera à placer judicieusement l'origine O du repère.

B. Pour fabriquer un livre…



Pour la fabrication d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à droite et à gauche, 3 cm en bas et en haut.

Soit *x* et *y* les deux dimensions en centimètres d'une page (voir schéma).

1°) On suppose, pour cette question uniquement, que $x = 28$ et $y = 31$;
calculer dans ce cas, en cm^2, l'aire d'une page et l'aire de la portion de page disponible pour l'impression.

Mêmes questions pour $x = 34$ et $y = 26$.

2°) Revenant au cas général, exprimer en fonction de x et y l'aire de la partie disponible pour l'impression.

On désire que l'aire de la partie disponible pour l'impression soit de 600 cm^2.

a) Déterminer y en fonction de x pour qu'il en soit ainsi.
   En déduire que l'aire $S(x)$ de la page est alors égale à $6f(x)$.
b) En s'aidant de l'étude des variations de f faite en A.2°), déterminer les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.