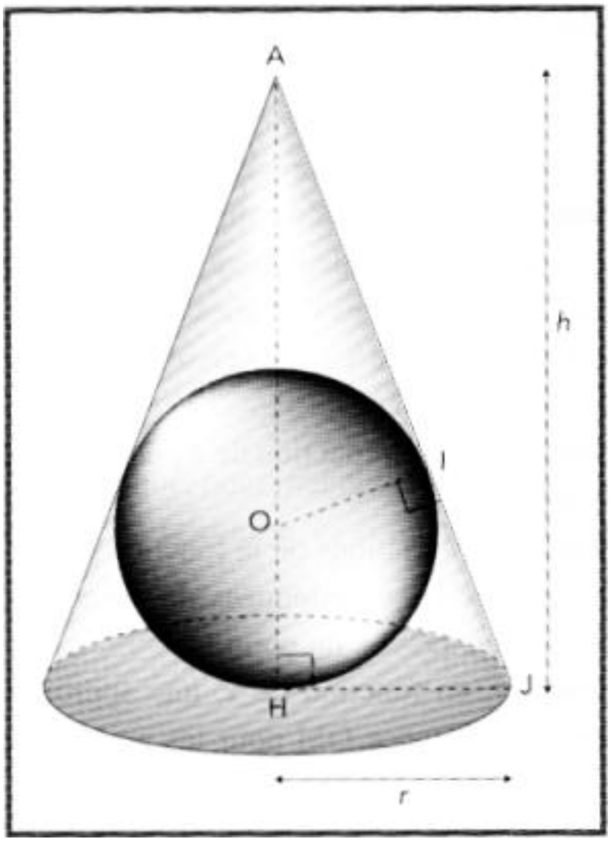
Exercice 4

On a représenté ci-dessous une sphère de rayon 1 et C un cône de hauteur h et de rayon r, circonscrit à la sphère.

Les points A, O, I, H et J sont coplanaires, les droites (OI) et (AJ) sont perpendiculaires, de même que les droites (HJ) et (AH).



1°) Justifier que $h > 2$.

2°) a) Démontrer que $r^2 = \dfrac{h}{h-2}$ (on pourra utiliser des triangles semblables ou un calcul de tangente dans deux triangles rectangles)

b) Soit V(h) le volume du cône. Exprimer V(h) en fonction de h.

3°) Soit f la fonction définie sur I =]2 ; +∞[par : $$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

a) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

b) Etudier les limites de f aux bornes de I.

c) Démontrer que C_f possède deux asymptotes (d) et (d') (préciser une équation de chacune d'elles).

d) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

e) En déduire que f possède sur I un minimum.

f) Tracer C_f.

4°) En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer la valeur de h pour laquelle le volume V(h) du cône est minimal.