

I/ Etude d'une fonction rationnelle (11 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1}.$$

1°) Etudier la parité de la fonction f , que peut-on en déduire pour sa courbe représentative C_f ?

2°) a) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 1 et quand x tend vers $+\infty$.

b) En déduire les limites de $f(x)$ quand x tend vers -1 et quand x tend vers $-\infty$.

c) Justifier que la courbe C_f admet deux asymptotes verticales (Δ_1) et (Δ_2) dont on donnera les équations.

3°) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 - 1}$$

4°) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe C_f .

b) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite (D).

5°) a) Calculer $f'(x)$

b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation complet.

6°) Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

7°) Tracer (Δ_1) , (Δ_2) , (D), (T) et C_f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité de longueur 1 cm.