Exercice 2

La population d'une ville nouvelle est donnée par la formule : $P(t)=\dfrac{40(t+5)^2}{t^2+100}$

où t est le temps écoulé depuis 1970 (exprimé en années) et $P(t)$ est le nombre d'habitants (exprimé en milliers).

On se propose d'étudier l'évolution de cette population.

A. Etude de fonction.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{(x+5)^2}{x^2+100}$

1°) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera les extremum).

2°) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.

B. Etude de la population.

1°) Préciser le réel k tel que $P(t) = k.f(t)$, pour $t\in[0\ ;+\infty[$.

2°) a) Déduire de la partie A, le tableau complet des variations de P sur $[0\ ;+\infty[$.

b) En déduire l'année pour laquelle la population de cette ville sera maximale.

c) Interpréter par une phrase la limite de P en $+\infty$.

3°) On rappelle que le rythme de croissance d'une population $P(t)$ est assimilé à la dérivée de la fonction P par rapport au temps t.

Calculer le rythme de croissance de cette population en 1980 et celui à prévoir en 2040.

4°) Représenter cette population dans un repère orthonormal bien choisi (on fera apparaître tous les résultats obtenus aux questions précédentes).