

Exercice 4 : (18.5 points)

I - Etude d'une fonction auxiliaire. (5.5pts) Soit P la fonction polynôme définie sur $[0 ; 6]$ par

$$P(x) = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15$$

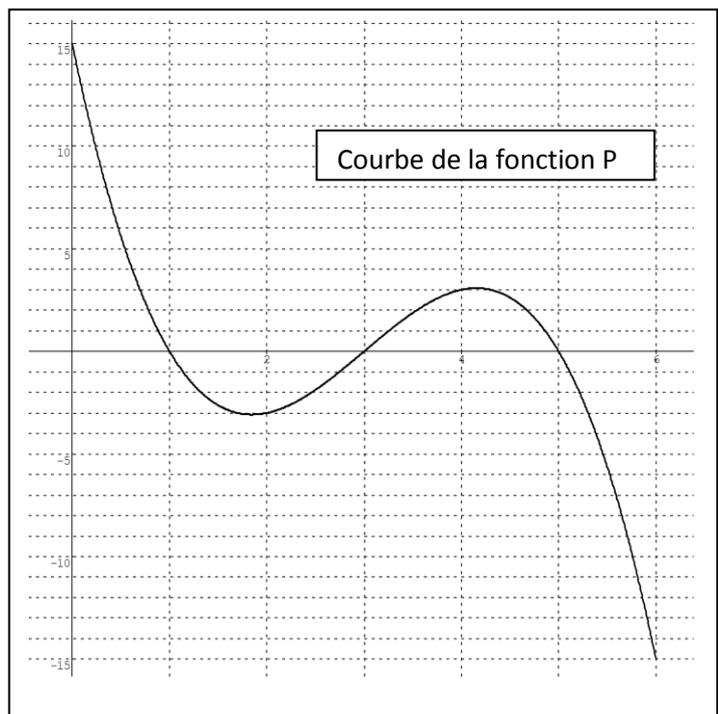
1pt 1°) a) Montrer que 1 est racine de P.

1pt b) En déduire une factorisation de P(x) sous la forme $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q(x) est une fonction polynôme du second degré.

1pt c) Montrer alors que les trois racines de P sont 1 ; 3 et 5.

2pts 2°) Etudier le signe de P(x).

0.5pt 3°) On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction P, expliquer brièvement comment on peut retrouver les résultats de la question 1-2°).

**II - Etude de la fonction f** (11pts)

Soit f la fonction polynôme définie sur $[0 ; 6]$

par
$$f(x) = -\frac{x^4}{4} + 3x^3 - \frac{23x^2}{2} + 15x$$

1. Variations de f.

1pt a) Montrer que $f'(x) = P(x)$.

1pt b) En déduire en utilisant la partie I, les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

0.5pt c) Préciser les abscisses des points pour lesquels Cf possède des tangentes horizontales.

1pt d) Donner les extremums locaux et les valeurs maximales et minimales de f

2. Tangente au point de Cf d'abscisse 0.

1.5pt a) Donner une équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0.

0.5pt b) Soit $g(x) = f(x) - (15x)$. Montrer que $g(x) = \frac{x^2}{4} (-x^2 + 12x - 46)$

2pts c) En déduire la position de Cf par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.

3. Représentation graphique de f.

- 3.5pts Tracer Cf,T et les tangentes horizontales à Cf sur l'annexe2.
(Utiliser la calculatrice pour avoir un maximum de précision)

III - Interprétation (2pts)

La fonction f représente en fait le bénéfice réalisé par une entreprise pendant les 7 premiers mois de l'année. $f(x)$ représente ce bénéfice exprimé en milliers d'euros et x le mois de l'année correspondant, sachant que $x=0$ correspond au 1^{er} janvier, $x=1$ au 1^{er} février ...

- 1pt 1°) Donner les périodes les plus rentables pour l'entreprise.
- 1pt 2°) Lire graphiquement la période pour laquelle l'entreprise réalise des bénéfices supérieurs à 3 milliers d'euros.