Problème *(11 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{9x}{x^2 + 2}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), unité graphique : 1 cm.

1°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à C_f.

b) Etudier la position relative de C_f et de D.

3°) a) Démontrer que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = \dfrac{-x^4 - 13x^2 + 14}{(x^2 + 2)^2}$

b) Factoriser le polynôme $g(x) = -x^4 - 13x^2 + 14$. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

4°) Démontrer que le point I(0 ;1) est un centre de symétrie pour la courbe C_f.

5°) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point I.

b) Déterminer les coordonnées des points de la courbe C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite D.

6°) Construire la courbe C_f et les droites D et T.

7°) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m (m paramètre réel), le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.