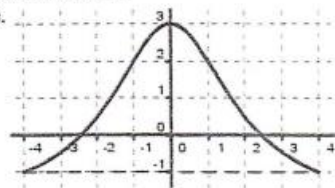


Exercice I: Cours : vrai-faux ✓

Répondre sans justification sur votre copie par vrai ou faux. Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point. Pour les vrai-faux 4 et 5 on considère la fonction f définie sur $[-4; 4]$ et représentée graphiquement ci-dessous :

1. Si une fonction f est décroissante sur un intervalle, alors $f(x)$ diminue quand x diminue.
2. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ paire et croissante est constante.
3. Sur $[0, +\infty[$, la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{x+1}$ est au-dessous de la parabole $y = x^2$.
4. Le réel 3 est le seul majorant de f .
5. Si g est la fonction paire telle que pour tout $x \geq 0$, $g(x) = -x + 4$, alors pour tout $x \in [-4; 4]$ on a $f(x) \leq g(x)$.

**Exercice II: Ensembles de définition** ✓

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x} + \sqrt{x^2-4}}{x-6} + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{x + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$h(x) = \frac{x - \frac{3x}{3-x}}{x + \frac{3x}{x-3}}$$

$$l(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4x^2-12x+8}} - \frac{1}{x^2-9}$$

Exercice III: Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1) \frac{9-x^2}{(x-3)(5x+7)} \leq 0 \quad \checkmark$$

$$2) \frac{2-x}{2x+3} < \frac{2x+3}{2-x} \quad \checkmark$$

$$3) \frac{7x-x^2}{(x-1)(x^3+4x^2+4x)} \leq 0$$

Exercice IV: Problème 1 ✓

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :
Soient f et g les fonctions définies par :

$$A = 1,000\,000\,2$$

et

$$B = \sqrt{1,000\,000\,4}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g .

Pour comparer les nombres A et B , on va comparer les fonctions f et g

- a. Montrer que pour tout $x \in [-1; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ et $g(x) > 0$
- b. Montrer que pour tout $x \in [-1; +\infty[\setminus \{0\}$, $(f(x))^2 < (g(x))^2$
- c. En déduire que pour tout $x \in [-1; +\infty[\setminus \{0\}$, $f(x) < g(x)$
- d. Conclure par la comparaison de A et B

Exercice V: Problème 2

Considérons la fonction : $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (1 unité = 3 cm)

1. a. Déterminer les variations de f sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$ ✓

b. Dresser son tableau de variations et construisez la courbe représentative de sa restriction à l'intervalle $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ ✓

c. Donner le plus petit majorant et le plus grand minorant de f sur cet intervalle.

d. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$:

$$\frac{2x^2}{3} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$$

2. a. Montrez que pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$$

b. On admet que $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $f(x)$ pour tout x de $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$; en déduire l'erreur commise.

c. Interpréter graphiquement ce résultat en construisant la droite Δ d'équation $y = 1-x$

d. Utiliser le résultat obtenu en b. pour obtenir une valeur approchée de $\frac{1}{1,003}$ puis de $\frac{1}{0,94}$ et calculer l'erreur commise pour ces deux valeurs approchées.

Exercice VI: Inégalités

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si $-1 \leq a \leq b \leq 1$ alors $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{b}{1+b^2}$