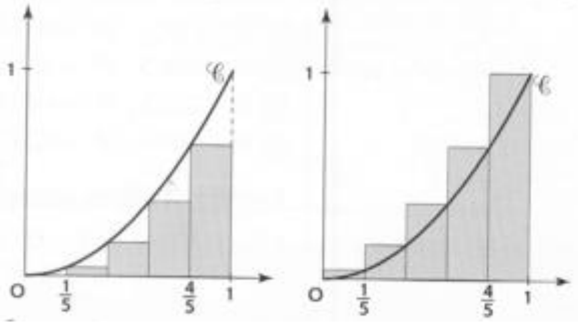
89 Calcul d'une aire

f est la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^2$.
Dans un repère, on note E la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ représentant f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.
L'objet du problème est d'approcher et de calculer l'aire S de la partie E.
Pour cela, on divise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n intervalles de même longueur ($n \in \mathbb{N}^*$) et on construit les rectangles comme il est indiqué sur les figures suivantes dans le cas où $n = 5$.



On note S_n la somme des aires des rectangles contenus dans E et T_n la somme des aires des rectangles contenant E.
On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant S \leqslant T_n$.

1. Calculer S_5 et T_5. On obtient un encadrement de S ; quelle est son amplitude ?

2. a) Vérifier l'égalité :

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right].$$

b) De même vérifier l'égalité :

$$T_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right].$$

c) Démontrer alors que $T_n - S_n = \frac{1}{n}$.

3. On admet que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

a) À l'aide de cette égalité, donner une expression de T_n en fonction de n.

b) Démontrer que la suite $(T_n)_{n \geqslant 1}$ converge.
Quelle est sa limite ?

c) Déduire de la question **2. c)** que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge.
Quelle est sa limite ?

d) Conclure l'étude. Quelle est la valeur de S ?