109 **Lignes de niveau de $M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$**

Soit un triangle ABC et $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$

$$M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2 .$$

1° *Allure des lignes de niveau de f*

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer que $f(M) = f(G) + 3MG^2$.

☞ $MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$ et analogues.

En déduire que lorsqu'elles ne sont pas vides, les lignes de niveau de f sont des cercles de centre G (éventuellement réduits au point G).

2° *Exemple :*

a) À l'aide du *théorème de la médiane,* montrer que :

$$GB^2 + GC^2 = \frac{1}{2} GA^2 + \frac{BC^2}{2} .$$

b) Ayant établi des relations analogues, en déduire que :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2) .$$

c) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = BC^2 + CA^2 + AB^2 \ ?$$

3° Retrouver la relation proposée par l'*exercice* 81.