

Exercice 4 (6 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a . On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

1°) a) Construire, en justifiant, le barycentre K des points (A ; -1) et (B ; 3).

b) Comparer les vecteurs \vec{IK} et \vec{AB} .

2°) Calculer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

$\vec{IK} \cdot \vec{AB}$, $\vec{IK} \cdot \vec{AC}$, $\vec{IJ} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{JK} \cdot \vec{AC}$.

3°) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$\left\| \vec{MA} + \vec{MB} \right\| = \left\| -\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\|.$$

4°) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\vec{IM} \cdot \vec{AB} = a^2$.

5°) a) Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $MB^2 + MC^2 = 2MJ^2 + \frac{1}{2} BC^2$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que : $MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

c) Démontrer que le point K est commun à (E_2) et à (E_3).