

Exercice 3 (5,5 points)

Dans une usine chacun des 50 ouvriers reçoit chaque mois 5 € pour chacune des pièces produites par l'ensemble des ouvriers. On estime que chaque ouvrier fabrique 2 pièces par mois. En outre, une prime de 30 250 € est partagée mensuellement entre les ouvriers, tous recevant des parts égales.

1°) Démontrer que si la direction embauche n ouvriers supplémentaires ($n \in \mathbf{N}$), le salaire de chacun devient :

$$s(n) = 10 \times f(n)$$

où f désigne la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{3\,025}{50 + x}.$$

2°) a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la courbe C représentant f dans un repère admet une asymptote oblique d .

3°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4°) Tracer d et C (unités graphiques : 1 cm pour 2 unités en abscisses, 1 cm pour 20 unités en ordonnées).

5°) a) Pour quelle valeur de n , le salaire de chacun est-il minimal ?

b) Quelle est la valeur non nulle minimale de n pour que $s(n)$ devienne supérieur à $s(0)$, c'est-à-dire supérieur au salaire de chaque ouvrier avant embauche des ouvriers supplémentaires ?

On justifiera la méthode utilisée.

c) Comment s'interprète la prime de chacun sur le graphique de la question 4 ?