

EXERCICE 2 (5 points)

Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :

« Le premier jour, nous vous offrons 100 € puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20 €. Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10 000 €? »

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant total en euros versé à Marc le n -ième jour. Ainsi, $u_1 = 100$.
 - a. Calculer u_2 .
 - b. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 1,05u_n + 20$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 400$.
 - a. Calculer v_1 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
 - c. Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que $u_n = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$.
 - d. Déterminer, en fonction de n , la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
3. Quelle réponse Marc doit-il donner ?

EXERCICE 3

Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.

On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.

Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs.

On note u_n le nombre de donateurs lors de la n -ième année ; on a donc $u_1 = 1000$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 300$.
3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = 0,8x + 300$.
À l'aide d'une construction graphique, émettre une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
4. Afin de démontrer cette conjecture, on introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n , par $v_n = 1500 - u_n$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Calculer la limite de (v_n) ; en déduire la limite de (u_n) .
Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association ?