

Le 1^{er} janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1^{er} janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel n , on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1^{er} janvier de l'année (2005+ n).

1) a. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .

La suite u de terme général u_n est-elle arithmétique? géométrique? Justifier les réponses.

b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2) Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 1000$.

a. Démontrer que la suite v de terme général v_n est géométrique. Préciser sa raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n .

En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 500 \times 0,9^n + 1000$.

c. Déterminer la limite de la suite u .

3) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.

En déduire le sens de variation de la suite u .

4) Au 1^{er} janvier 2005, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?