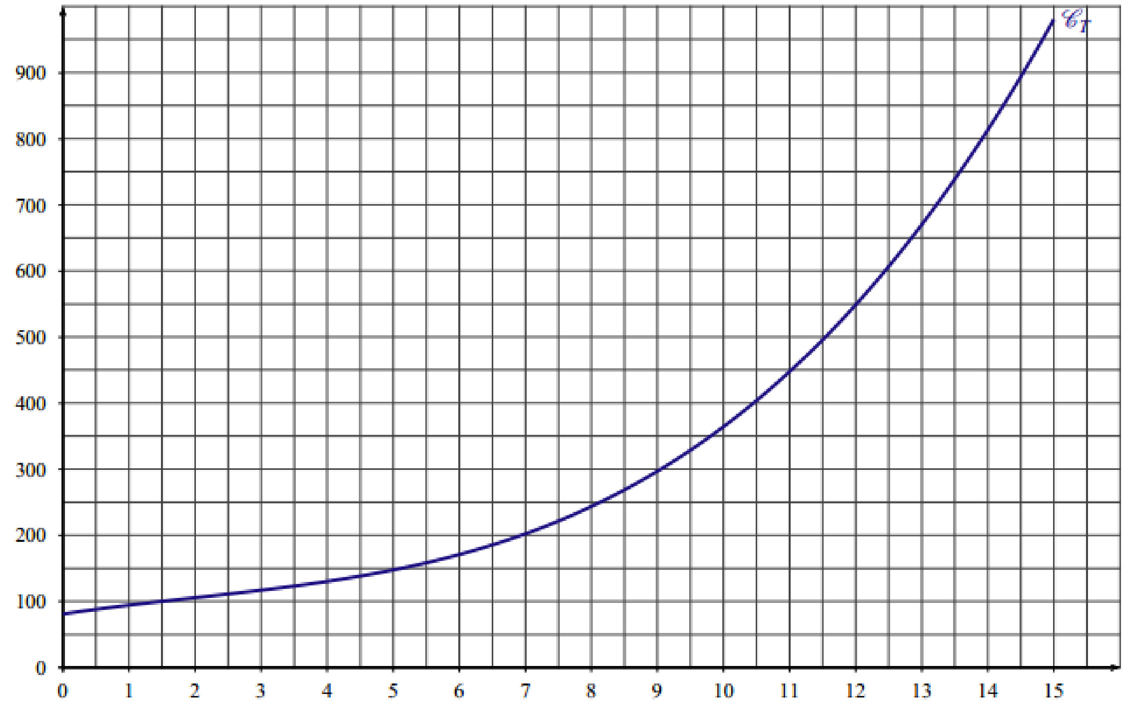
Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par :

$$C(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 15x + 81$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués. La courbe $\mathscr{C}_T$ représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 60 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.
   a) Dans le repère précédent, tracer la courbe représentative de la fonction recette.
   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?

3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a) Sur le graphique précédent, placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_T$.
   On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $C_M(a)$.
   c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$.